Bell egyenlőtlenségek és algebrai térelmélet

Vecsernyés Péter

Wigner FK, Budapest

Entanglement Day, Budapest
2014.09.04.

Tartalom

korrelációk - kvantumvilág - lokalitás

1. Korrelációk klasszikus rendszerekben
   - Korrelációk eseményalgebrákban
   - Független rendszerek közötti korrelációk
   - Valószínűségi mértékek konvex struktúrája
   - Klasszikus rendszerek alternatív leírása
2. Korrelációk kvantumrendszerekben
   - Kvantumvilág
   - Tanúoperátorok
   - Bell egyenlőtlenség
   - Werner állapotok
   - Rejtett paraméterek
3. Bell egyenlőtlenség lokális kvantumrendszerekben
   - Lokális kvantumelmélet
   - Nemlokális korrelációk lokális oka

Tartalom

korrelációk - kvantumvilág - lokalitás

1. Korrelációk klasszikus rendszerekben
   - Korrelációk eseményalgebrákban
   - Független rendszerek közötti korrelációk
   - Valószínűségi mértékek konvex struktúrája
   - Klasszikus rendszerek alternatív leírása
2. Korrelációk kvantumrendszerekben
   - Kvantumvilág
   - Tanúoperátorok
   - Bell egyenlőtlenség
   - Werner állapotok
   - Rejtett paraméterek
3. Bell egyenlőtlenség lokális kvantumrendszerekben
   - Lokális kvantumelmélet
   - Nemlokális korrelációk lokális oka

Tartalom

korrelációk - kvantumvilág - lokalitás

1. Korrelációk klasszikus rendszerekben
   - Korrelációk eseményalgebrákban
   - Független rendszerek közötti korrelációk
   - Valószínűségi mértékek konvex struktúrája
   - Klasszikus rendszerek alternatív leírása
2. Korrelációk kvantumrendszerekben
   - Kvantumvilág
   - Tanúoperátorok
   - Bell egyenlőtlenség
   - Werner állapotok
   - Rejtett paraméterek
3. Bell egyenlőtlenség lokális kvantumrendszerekben
   - Lokális kvantumelmélet
   - Nemlokális korrelációk lokális oka

Korrelációk (Ω, Σ, p) valószínűségi mértékterekben

- (Ω, Σ) események σ-algebrája
  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ "mérhető" halmazok rendszere, mely megszámlálható unióra, különbségképzésre zárt, és $\Omega \in \Sigma$
- $p \colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi mérték
  megszámlálhatóan additív nemnegatív halmazfüggvény, melyre $p(\Omega) = 1$
- $A, B \in \Sigma$ "esemény" korrelál:

$$p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$$

Korrelációk (Ω, Σ, p) valószínűségi mértékterekben

- (Ω, Σ) események σ-algebrája
  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ "mérhető" halmazok rendszere, mely megszámlálható unióra, különbségképzésre zárt, és $\Omega \in \Sigma$
- $p \colon \Sigma \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi mérték
  megszámlálhatóan additív nemnegatív halmazfüggvény, melyre $p(\Omega) = 1$
- $A, B \in \Sigma$ "esemény" korrelál:

$$p(A \cap B) \neq p(A)p(B)$$

Független rendszerek közötti korrelációk

- Függetlenül összetett rendszer: eseményalgebrák (többszörös) Descartes-szorzata $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \ni (A_1, A_2)$ rendezett halmazpárok / eseménypárok
- Valószínűségi mértékek szorzata: $p \equiv p_1 \times p_2 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$

$$p(A_1, A_2) := p_1(A_1)p_2(A_2),$$

$A_i \in \Sigma_i, p_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi mérték $\to$ korrelálatlan rendszerek

- Korrelált rendszerek: $p : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$ nem szorzatmérték, azaz $\exists (A_1, A_2) \in (\Sigma_1 \times \Sigma_2) :$

$$p(A_1, A_2) \neq p(A_1, \Omega_2)p(\Omega_1, A_2).$$

Független rendszerek közötti korrelációk

- Függetlenül összetett rendszer: eseményalgebrák (többszörös) Descartes-szorzata $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \ni (A_1, A_2)$ rendezett halmazpárok / eseménypárok
- Valószínűségi mértékek szorzata: $p \equiv p_1 \times p_2 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$

$$p(A_1, A_2) := p_1(A_1) p_2(A_2),$$

  $A_i \in \Sigma_i, p_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi mérték $\to$ korrelálatlan rendszerek
- Korrelált rendszerek: $p : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$ nem szorzatmérték, azaz $\exists (A_1, A_2) \in (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$:

$$p(A_1, A_2) \neq p(A_1, \Omega_2) p(\Omega_1, A_2).$$

Független rendszerek közötti korrelációk

- Függetlenül összetett rendszer: eseményalgebrák (többszörös) Descartes-szorzata $(\Omega_1 \times \Omega_2, \Sigma_1 \times \Sigma_2)$
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \ni (A_1, A_2)$ rendezett halmazpárok / eseménypárok
- Valószínűségi mértékek szorzata: $p \equiv p_1 \times p_2 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$

$$p(A_1, A_2) := p_1(A_1)p_2(A_2),$$

  $A_i \in \Sigma_i, p_i : \Sigma_i \to \mathbb{R}_+$ valószínűségi mérték $\to$ korrelálatlan rendszerek
- Korrelált rendszerek: $p : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}_+$ nem szorzatmérték, azaz $\exists (A_1, A_2) \in (\Sigma_1 \times \Sigma_2)$:

$$p(A_1, A_2) \neq p(A_1, \Omega_2)p(\Omega_1, A_2).$$

Valószínűségi mértékek konvex struktúrája

- $S(\Sigma)$, (Ω, Σ)-n adott valószínűségi mértékek halmaza konvex
  $S(\Sigma) \ni p_1, p_2 \Rightarrow \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in S(\Sigma), \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$
- Tiszta mértékek: $E(\Sigma) \subset S(\Sigma)$ extremális pontok
  $E(\Sigma) \ni p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \Rightarrow p = p_1.$
- Atomos eseményalgebrák: $\exists\, \mathcal{M} \subset \Sigma$ minimális halmazokból álló megszámlálható generátorrendszer
  - $\mathcal{M} \ni M \supseteq A \Rightarrow A = M$ vagy $A = \emptyset$
    ($\Rightarrow M \cap M' = \emptyset$, ha $M, M' \in \mathcal{M}$ különböző)
  - $\cup_{M \in \mathcal{M}} M = \Omega$
- atomos Σ esetén $E(\Sigma) = \{d_M | M \in \mathcal{M}\}$
  d_M: atomra koncentrált mérték, $d_M(M') = \delta_{M,M'}, M \in \mathcal{M}.$
- atomos Σ_1, Σ_2 esetén $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, azaz
  $S(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \ni p = \sum_{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} p(M_1, M_2) d_{M_1} \times d_{M_2}$
  $\Rightarrow S(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ szorzatmértékek konvex burka

Valószínűségi mértékek konvex struktúrája

- $S(\Sigma)$, (Ω, Σ)-n adott valószínűségi mértékek halmaza konvex
  $S(\Sigma) \ni p_1, p_2 \Rightarrow \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in S(\Sigma), \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$
- Tiszta mértékek: $E(\Sigma) \subset S(\Sigma)$ extremális pontok
  $E(\Sigma) \ni p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \Rightarrow p = p_1.$
- Atomos eseményalgebrák: $\exists\, \mathcal{M} \subset \Sigma$ minimális halmazokból álló megszámlálható generátorrendszer
  • $\mathcal{M} \ni M \supseteq A \Rightarrow A = M$ vagy $A = \emptyset$
  ($\Rightarrow M \cap M' = \emptyset$, ha $M, M' \in \mathcal{M}$ különböző)
  • $\cup_{M \in \mathcal{M}} M = \Omega$
- atomos Σ esetén $E(\Sigma) = \{d_M | M \in \mathcal{M}\}$
  d_M: atomra koncentrált mérték, $d_M(M') = \delta_{M,M'}, M \in \mathcal{M}.$
- atomos Σ_1, Σ_2 esetén $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, azaz
  $S(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \ni p = \sum_{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} p(M_1, M_2) d_{M_1} \times d_{M_2}$
  $\Rightarrow S(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ szorzatmértékek konvex burka

Valószínűségi mértékek konvex struktúrája

- $S(\Sigma)$, (Ω, Σ)-n adott valószínűségi mértékek halmaza konvex
$S(\Sigma) \ni p_1, p_2 \Rightarrow \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in S(\Sigma), \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$
- Tiszta mértékek: $E(\Sigma) \subset S(\Sigma)$ extremális pontok
$E(\Sigma) \ni p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \Rightarrow p = p_1.$
- Atomos eseményalgebrák: $\exists\, \mathcal{M} \subset \Sigma$ minimális halmazokból álló megszámlálható generátorrendszer
$\bullet\ \mathcal{M} \ni M \supseteq A \Rightarrow A = M$ vagy $A = \emptyset$
($\Rightarrow M \cap M' = \emptyset$, ha $M, M' \in \mathcal{M}$ különböző)
$\bullet \cup_{M \in \mathcal{M}} M = \Omega$
- atomos Σ esetén $E(\Sigma) = \{d_M | M \in \mathcal{M}\}$
d_M: atomra koncentrált mérték, $d_M(M') = \delta_{M,M'}, M \in \mathcal{M}$.
- atomos Σ_1, Σ_2 esetén $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, azaz
$S(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \ni p = \sum_{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} p(M_1, M_2) d_{M_1} \times d_{M_2}$
$\Rightarrow S(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ szorzatmértékek konvex burka

Valószínűségi mértékek konvex struktúrája

- $S(\Sigma)$, (Ω, Σ)-n adott valószínűségi mértékek halmaza konvex
  $S(\Sigma) \ni p_1, p_2 \Rightarrow \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in S(\Sigma), \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0.$
- Tiszta mértékek: $E(\Sigma) \subset S(\Sigma)$ extremális pontok
  $E(\Sigma) \ni p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \Rightarrow p = p_1.$
- Atomos eseményalgebrák: $\exists\ \mathcal{M} \subset \Sigma$ minimális halmazokból álló megszámlálható generátorrendszer
  $\bullet\ \mathcal{M} \ni M \supseteq A \Rightarrow A = M$ vagy $A = \emptyset$
  ($\Rightarrow M \cap M' = \emptyset$, ha $M, M' \in \mathcal{M}$ különböző)
  $\bullet\ \cup_{M \in \mathcal{M}} M = \Omega$
- atomos Σ esetén $E(\Sigma) = \{d_M | M \in \mathcal{M}\}$
  d_M: atomra koncentrált mérték, $d_M(M') = \delta_{M,M'}, M \in \mathcal{M}$.
- atomos Σ_1, Σ_2 esetén $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$, azaz
  $S(\Sigma_1 \times \Sigma_2) \ni p = \sum_{(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2} p(M_1, M_2) d_{M_1} \times d_{M_2}$
  $\Rightarrow S(\Sigma_1 \times \Sigma_2)$ szorzatmértékek konvex burka

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

(Ω, Σ) eseményalgebra $\leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kommutatív operátoralgebra
p valószínűségi mérték $\leftrightarrow$ $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot

- $\mathcal{F}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\}$ függvényalgebra
  egységelemes kommutatív $*$-algebra pontonkénti lineárkombinációra, szorzásra, komplex konjugálásra
- $\mathcal{F}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) := \langle \chi_A, A \in \Sigma \rangle$ unitális $*$-részalgebra
  Σ-beli elemek (önadjungált) karakterisztikus függvényei által generált
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
- $\omega_p(\chi_A) := p(A), A \in \Sigma$ pozitív normált lineáris funkcionált, azaz állapotot ad $\mathcal{A}$-n
- pontos $\leftrightarrow$: ha (Ω, Σ, μ) σ-algebra σ-véges μ mértékkel, akkor $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu)$ "szorzó" operátoralgebra (kommutatív Neumann algebra) az $L^2(\Omega, \mu)$ Hilbert téren,
  a nemnegatív, egy normájú $L^1(\Omega, \mu)$-beli függvények az állapotok $\mathcal{A}$-n és a valószínűségi mértékek (Ω, Σ)-n.

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

(Ω, Σ) eseményalgebra $\leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kommutatív operátoralgebra
p valószínűségi mérték $\leftrightarrow$ $\omega \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot

- $\mathcal{F}(\Omega) := \{f \colon \Omega \to \mathbb{C}\}$ függvényalgebra
  egységelemes kommutatív *-algebra pontonkénti lineárkombinációra, szorzásra, komplex konjugálásra
- $\mathcal{F}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) := \langle \chi_A, A \in \Sigma \rangle$ unitális *-részalgebra
  Σ-beli elemek (önadjungált) karakterisztikus függvényei által generált
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
- $\omega_p(\chi_A) := p(A), A \in \Sigma$ pozitív normált lineáris funkcionált, azaz állapotot ad $\mathcal{A}$-n
- pontos $\leftrightarrow$: ha (Ω, Σ, μ) σ-algebra σ-véges μ mértékkel, akkor $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu)$ "szorzó" operátoralgebra (kommutatív Neumann algebra) az $L^2(\Omega, \mu)$ Hilbert téren,
  a nemnegatív, egy normájú $L^1(\Omega, \mu)$-beli függvények az állapotok $\mathcal{A}$-n és a valószínűségi mértékek (Ω, Σ)-n.

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

(Ω, Σ) eseményalgebra $\leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kommutatív operátoralgebra
p valószínűségi mérték $\leftrightarrow$ $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot

- $\mathcal{F}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\}$ függvényalgebra
  egységelemes kommutatív *-algebra pontonkénti lineárkombinációra, szorzásra, komplex konjugálásra
- $\mathcal{F}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) := \langle \chi_A, A \in \Sigma \rangle$ unitális *-részalgebra
  Σ-beli elemek (önadjungált) karakterisztikus függvényei által generált
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
- $\omega_p(\chi_A) := p(A), A \in \Sigma$ pozitív normált lineáris funkcionált, azaz állapotot ad $\mathcal{A}$-n
- pontos $\leftrightarrow$: ha (Ω, Σ, μ) σ-algebra σ-véges μ mértékkel, akkor $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu)$ "szorzó" operátoralgebra (kommutatív Neumann algebra) az $L^2(\Omega, \mu)$ Hilbert téren,
  a nemnegatív, egy normájú $L^1(\Omega, \mu)$-beli függvények az állapotok $\mathcal{A}$-n és a valószínűségi mértékek (Ω, Σ)-n.

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

(Ω, Σ) eseményalgebra $\leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kommutatív operátoralgebra
p valószínűségi mérték $\leftrightarrow$ $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot

- $\mathcal{F}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\}$ függvényalgebra
  egységelemes kommutatív *-algebra pontonkénti lineárkombinációra, szorzásra, komplex konjugálásra
- $\mathcal{F}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) := \langle \chi_A, A \in \Sigma \rangle$ unitális *-részalgebra
  Σ-beli elemek (önadjungált) karakterisztikus függvényei által generált
- $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B, \qquad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B$
- $\omega_p(\chi_A) := p(A), A \in \Sigma$ pozitív normált lineáris funkcionált, azaz állapotot ad $\mathcal{A}$-n
- pontos $\leftrightarrow$: ha (Ω, Σ, μ) σ-algebra σ-véges μ mértékkel, akkor $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu)$ "szorzó" operátoralgebra (kommutatív Neumann algebra) az $L^2(\Omega, \mu)$ Hilbert téren,
  a nemnegatív, egy normájú $L^1(\Omega, \mu)$-beli függvények az állapotok $\mathcal{A}$-n és a valószínűségi mértékek (Ω, Σ)-n.

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

(Ω, Σ) eseményalgebra $\leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ kommutatív operátoralgebra
p valószínűségi mérték $\leftrightarrow$ $\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot

- $\mathcal{F}(\Omega) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{C}\}$ függvényalgebra
  egységelemes kommutatív *-algebra pontonkénti lineárkombinációra, szorzásra, komplex konjugálásra
- $\mathcal{F}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}(\Omega, \Sigma) := \langle \chi_A, A \in \Sigma \rangle$ unitális *-részalgebra
  Σ-beli elemek (önadjungált) karakterisztikus függvényei által generált
- $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B, \qquad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \chi_B$
- $\omega_p(\chi_A) := p(A), A \in \Sigma$ pozitív normált lineáris funkcionált, azaz állapotot ad $\mathcal{A}$-n
- pontos $\leftrightarrow$: ha (Ω, Σ, μ) σ-algebra σ-véges μ mértékkel, akkor $\mathcal{A} := L^\infty(\Omega, \mu)$ "szorzó" operátoralgebra (kommutatív Neumann algebra) az $L^2(\Omega, \mu)$ Hilbert téren,
  a nemnegatív, egy normájú $L^1(\Omega, \mu)$-beli függvények az állapotok $\mathcal{A}$-n és a valószínűségi mértékek (Ω, Σ)-n.

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

- szorzat eseményalgebra $\leftrightarrow$ tenzorszorzat operátoralgebra
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$
- szorzatmérték $\leftrightarrow$ szorzatállapot
  $p_1 \times p_2 \leftrightarrow \omega_1 \otimes \omega_2$
- Tanulság: független (atomos) összetevőkből álló klasszikus rendszereknek, azaz a megfelelő kommutatív *-algebrák tenzorszorzatának állapottere szorzatállapotok konvex burka

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

- szorzat eseményalgebra $\leftrightarrow$ tenzorszorzat operátoralgebra
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$
- szorzatmérték $\leftrightarrow$ szorzatállapot
  $p_1 \times p_2 \leftrightarrow \omega_1 \otimes \omega_2$
- Tanulság: független (atomos) összetevőkből álló klasszikus rendszereknek, azaz a megfelelő kommutatív $*$-algebrák tenzorszorzatának állapottere szorzatállapotok konvex burka

Klasszikus rendszerek operátoralgebrai leírása

- szorzat eseményalgebra $\leftrightarrow$ tenzorszorzat operátoralgebra
  $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \leftrightarrow \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$
- szorzatmérték $\leftrightarrow$ szorzatállapot
  $p_1 \times p_2 \leftrightarrow \omega_1 \otimes \omega_2$
- Tanulság: független (atomos) összetevőkből álló klasszikus rendszereknek, azaz a megfelelő kommutatív $*$-algebrák tenzorszorzatának állapottere szorzatállapotok konvex burka

Kvantumvilág

- nem-kommutatív *-algebrák világa (C^*, Neumann)
  megfigyelhető mennyiségek: megfigyelhető operátorok (absztrakt) $\mathcal{A}$ algebrája
  állapotok: $S(\mathcal{A}) := \{\omega \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C} | \omega$ pozitív, lineáris, normált$\}$ konvex halmaz (normálástól - $\omega(\mathbf{1}_\mathcal{A}) = 1$ - eltekintve konvex kónusz)
- kvantumvilág tükröződése az állapotokon:

$$S(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \supset \mathcal{K}(S(\mathcal{A}_1) \otimes S(\mathcal{A}_2))$$

  független összetevőkből álló rendszer állapotait nem adja ki a szorzatállapotok konvex burka (=: szeparábilis állapotok), vannak összefonódott állapotok

$$S(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \setminus \mathcal{K}(S(\mathcal{A}_1) \otimes S(\mathcal{A}_2))$$

Kvantumvilág

- nem-kommutatív *-algebrák világa (C^*, Neumann)
  megfigyelhető mennyiségek: megfigyelhető operátorok (absztrakt) $\mathcal{A}$ algebrája
  állapotok: $S(\mathcal{A}) := \{\omega\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C} | \omega$ pozitív, lineáris, normált$\}$ konvex halmaz (normálástól - $\omega(\mathbf{1}_{\mathcal{A}}) = 1$ - eltekintve konvex kónusz)
- kvantumvilág tükröződése az állapotokon:

$$S(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \supset \mathcal{K}(S(\mathcal{A}_1) \otimes S(\mathcal{A}_2))$$

  független összetevőkből álló rendszer állapotait nem adja ki a szorzatállapotok konvex burka (=: szeparábilis állapotok), vannak összefonódott állapotok

$$S(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2) \setminus \mathcal{K}(S(\mathcal{A}_1) \otimes S(\mathcal{A}_2))$$

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr}: M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$ bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövő relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$ önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$ bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövő relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$ önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$ bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövő relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$ önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$
  bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra
  $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövő relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$
  önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$
  bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra
  $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövó relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$
  önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr} : M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$
  bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra
  $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövó relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$
  önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Tanúoperátorok

- $M_{n_1} \otimes M_{n_2} \simeq M_{n_1 n_2}$ véges dimenziós algebrák összefonódott állapotaira tanúk
- $\mathrm{Tr}: M_n \to \mathbb{C}$ hű állapot ($A \in M_n^+$ és $\mathrm{Tr}\, A = 0 \Rightarrow A = 0$) voltából
- $\Rightarrow M_n^+ \ni A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A-) \in P(M_n)$
  bijekció M_n^+ és $P(M_n)$, az M_n-en adott pozitív lineáris funkcionálok kónusza köz0tt
- $\Rightarrow (A, B) := \mathrm{Tr}\, AB$ skalárszorzat az önadjungált elemek M_n^{sa} valós lineáris terén
- $\Rightarrow M_n^{sa} \supset M_n^+ = M_n^{+d}$ önduális kónusz erre a skalárszorzatra
  $M_n^{+d} := \{A \in M_n^{sa} | (A, B) \geq 0, B \in M_n^+\}$
- $M_{mn}^+ = (M_m \otimes M_n)^+ \supset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)$ állapotokból jövő relációt a duális kónusz képzés fordítja: $M_{mn}^+ = M_{mn}^{+d} \subset \mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d$
- Tanúoperátorok halmaza: $\mathcal{K}(M_m^+ \otimes M_n^+)^d \setminus M_{mn}^+$
  önadjungált, de nem pozitív operátorok; szeparábilis állapotokban pozitív, valemelyik összefonódott állapotban negat1v várható értékűek

Bell egyenlőtlenség

Cél: korrelációk jellemzése két kommutáló $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ unitális C^*-részalgebra között
pl. $\mathcal{C} = M_m \otimes M_n, \mathcal{A} = M_m \otimes \mathbf{1}_n, \mathcal{B} = \mathbf{1}_m \otimes M_n$
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Leftrightarrow AB \neq 0$, ha $0 \neq A \in \mathcal{A}$ és $0 \neq B \in \mathcal{B})$

- Bell operátorok halmaza: $\mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
$$\frac{1}{2}A_1(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}A_2(B_1 - B_2), \quad A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}$$
alakú elemek, $-\mathbf{1} \leq A_i^* = A_i, B_i^* = B_i \leq \mathbf{1}$.
- $|\omega(R)| \leq \sqrt{2}$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$.
- $|\omega(R)| \leq 1$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$ és $\omega_{|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ szeparábilis.
- Bell koefficiens: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup\{|\omega(R)| \mid R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$.
- Bell egyenlőtlenség: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$
sérül, ha a Bell koefficiens > 1, maximálisan sérül, ha $\sqrt{2}$.

Bell egyenlőtlenség

Cél: korrelációk jellemzése két kommutáló $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ unitális C^*-részalgebra között
pl. $\mathcal{C} = M_m \otimes M_n, \mathcal{A} = M_m \otimes \mathbf{1}_n, \mathcal{B} = \mathbf{1}_m \otimes M_n$
($\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Leftrightarrow AB \neq 0$, ha $0 \neq A \in \mathcal{A}$ és $0 \neq B \in \mathcal{B}$)

- Bell operátorok halmaza: $\mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$$\frac{1}{2}A_1(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}A_2(B_1 - B_2), \quad A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}$$

alakú elemek, $-\mathbf{1} \leq A_i^* = A_i, B_i^* = B_i \leq \mathbf{1}$.

- $|\omega(R)| \leq \sqrt{2}$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$.
- $|\omega(R)| \leq 1$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$ és $\omega_{|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ szeparábilis.
- Bell koefficiens: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup\{|\omega(R)| \mid R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$.
- Bell egyenlőtlenség: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$
sérül, ha a Bell koefficiens > 1, maximálisan sérül, ha $\sqrt{2}$.

Bell egyenlőtlenség

Cél: korrelációk jellemzése két kommutáló $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ unitális C^*-részalgebra között
pl. $\mathcal{C} = M_m \otimes M_n, \mathcal{A} = M_m \otimes \mathbf{1}_n, \mathcal{B} = \mathbf{1}_m \otimes M_n$
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Leftrightarrow AB \neq 0$, ha $0 \neq A \in \mathcal{A}$ és $0 \neq B \in \mathcal{B})$

- Bell operátorok halmaza: $\mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$$\frac{1}{2} A_1 (B_1 + B_2) + \frac{1}{2} A_2 (B_1 - B_2), \quad A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}$$

  alakú elemek, $-\mathbf{1} \leq A_i^* = A_i, B_i^* = B_i \leq \mathbf{1}$.
- $|\omega(R)| \leq \sqrt{2}$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$.
- $|\omega(R)| \leq 1$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$ és $\omega_{|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ szeparábilis.
- Bell koefficiens: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup\{|\omega(R)| \mid R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$.
- Bell egyenlőtlenség: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$
  sérül, ha a Bell koefficiens > 1, maximálisan sérül, ha $\sqrt{2}$.

Bell egyenlőtlenség

Cél: korrelációk jellemzése két kommutáló $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ unitális C^*-részalgebra között
pl. $\mathcal{C} = M_m \otimes M_n, \mathcal{A} = M_m \otimes \mathbf{1}_n, \mathcal{B} = \mathbf{1}_m \otimes M_n$
$(\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Leftrightarrow AB \neq 0$, ha $0 \neq A \in \mathcal{A}$ és $0 \neq B \in \mathcal{B})$

- Bell operátorok halmaza: $\mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$

$$\frac{1}{2}A_1(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}A_2(B_1 - B_2), \quad A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}$$

  alakú elemek, $-\mathbf{1} \leq A_i^* = A_i, B_i^* = B_i \leq \mathbf{1}$.
- $|\omega(R)| \leq \sqrt{2}$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$.
- $|\omega(R)| \leq 1$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$ és $\omega_{|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ szeparábilis.
- Bell koefficiens: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup\{|\omega(R)| \mid R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$.
- Bell egyenlőtlenség: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$
  sérül, ha a Bell koefficiens > 1, maximálisan sérül, ha $\sqrt{2}$.

Bell egyenlőtlenség

Cél: korrelációk jellemzése két kommutáló $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ unitális C^*-részalgebra között
pl. $\mathcal{C} = M_m \otimes M_n, \mathcal{A} = M_m \otimes \mathbf{1}_n, \mathcal{B} = \mathbf{1}_m \otimes M_n$
($\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \simeq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Leftrightarrow AB \neq 0$, ha $0 \neq A \in \mathcal{A}$ és $0 \neq B \in \mathcal{B}$)

- Bell operátorok halmaza: $\mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$
$$\frac{1}{2}A_1(B_1 + B_2) + \frac{1}{2}A_2(B_1 - B_2), \quad A_i \in \mathcal{A}, B_i \in \mathcal{B}$$
alakú elemek, $-\mathbf{1} \leq A_i^* = A_i, B_i^* = B_i \leq \mathbf{1}$.
- $|\omega(R)| \leq \sqrt{2}$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$.
- $|\omega(R)| \leq 1$, ha $R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \omega \in S(\mathcal{C})$ és $\omega_{|\mathcal{A} \vee \mathcal{B}}$ szeparábilis.
- Bell koefficiens: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) := \sup\{|\omega(R)| \mid R \in \mathbb{B}(\mathcal{A}, \mathcal{B})\}$.
- Bell egyenlőtlenség: $\beta(\omega, \mathcal{A}, \mathcal{B}) \leq 1$
sérül, ha a Bell koefficiens > 1, maximálisan sérül, ha $\sqrt{2}$.

Bell egyenlőtlenség

- Bell egyenlőséget sértő állapot létezik $S(\mathcal{C})$-ben $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is nem-kommutatív
- Példa: $\mathcal{C} = M_2 \otimes M_2, \mathcal{A} = M_2 \otimes \mathbf{1}_2, \mathcal{B} = \mathbf{1}_2 \otimes M_2$
  • $A_i := (\mathbf{a}_i, \sigma) \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}_i| = 1, i = 1, 2$
  • $B_i := \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{b}_i, \sigma), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{b}_i| = 1, i = 1, 2$
  önadjungáltak, négyzetük $\mathbf{1}$
  • egyparaméteres állapotsereg: $\omega_\lambda := \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda -), \lambda \in [0, 1]$

$$\rho_\lambda := \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \lambda(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

  (normált) Tr és szinglett állapot konvex kombinációi
  • $\omega_\lambda(A_i B_j) = -\lambda(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \Rightarrow$
  $2|\omega_\lambda(R)| = \lambda|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|$
  • $\mathbf{a}_1 = (0, 1.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$
  • $\mathbf{a}_2 = (1, 0.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_2 - (-1, 1, 0)$
  spec választás esetén: $|\omega_\lambda(R)| = \lambda\sqrt{2} \Rightarrow$
  • $0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$ Bell egyenlőtlenség teljesül(het)
  • $1/\sqrt{2} < \lambda \leq 1$ Bell egyenlőtlenség sérül

Bell egyenlőtlenség

- Bell egyenlőséget sértő állapot létezik $S(\mathcal{C})$-ben $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is nem-kommutatív
- Példa: $\mathcal{C} = M_2 \otimes M_2, \mathcal{A} = M_2 \otimes \mathbf{1}_2, \mathcal{B} = \mathbf{1}_2 \otimes M_2$
  • $A_i := (\mathbf{a}_i, \sigma) \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}_i| = 1, i = 1, 2$
  • $B_i := \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{b}_i, \sigma), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{b}_i| = 1, i = 1, 2$
  önadjungáltak, négyzetük $\mathbf{1}$
  • egyparaméteres állapotsereg: $\omega_\lambda := \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda -), \lambda \in [0, 1]$

$$\rho_\lambda := \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \lambda(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

  (normált) Tr és szinglett állapot konvex kombinációi
  • $\omega_\lambda(A_i B_j) = -\lambda(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \Rightarrow$
  $2|\omega_\lambda(R)| = \lambda|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|$
  • $\mathbf{a}_1 = (0, 1.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$
  • $\mathbf{a}_2 = (1, 0.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_2 - (-1, 1, 0)$
  spec választás esetén: $|\omega_\lambda(R)| = \lambda\sqrt{2} \Rightarrow$
  • $0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$ Bell egyenlőtlenség teljesül(het)
  • $1/\sqrt{2} < \lambda \leq 1$ Bell egyenlőtlenség sérül

Bell egyenlőtlenség

- Bell egyenlőséget sértő állapot létezik $S(\mathcal{C})$-ben $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is nem-kommutatív
- Példa: $\mathcal{C} = M_2 \otimes M_2, \mathcal{A} = M_2 \otimes \mathbf{1}_2, \mathcal{B} = \mathbf{1}_2 \otimes M_2$
  • $A_i := (\mathbf{a}_i, \sigma) \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}_i| = 1, i = 1, 2$
  • $B_i := \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{b}_i, \sigma), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{b}_i| = 1, i = 1, 2$
  önadjungáltak, négyzetük $\mathbf{1}$
  • egyparaméteres állapotsereg: $\omega_\lambda := \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda -), \lambda \in [0, 1]$

$$\rho_\lambda := \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \lambda(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

(normált) Tr és szinglett állapot konvex kombinációi
• $\omega_\lambda(A_i B_j) = -\lambda(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \Rightarrow$
$2|\omega_\lambda(R)| = \lambda|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|$
• $\mathbf{a}_1 = (0, 1.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$
• $\mathbf{a}_2 = (1, 0.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_2 - (-1, 1, 0)$
spec választás esetén: $|\omega_\lambda(R)| = \lambda\sqrt{2} \Rightarrow$
• $0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$ Bell egyenlőtlenség teljesül(het)
• $1/\sqrt{2} < \lambda \leq 1$ Bell egyenlőtlenség sérül

Bell egyenlőtlenség

- Bell egyenlőséget sértő állapot létezik $S(\mathcal{C})$-ben $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is nem-kommutatív
- Példa: $\mathcal{C} = M_2 \otimes M_2, \mathcal{A} = M_2 \otimes \mathbf{1}_2, \mathcal{B} = \mathbf{1}_2 \otimes M_2$
  • $A_i := (\mathbf{a}_i, \sigma) \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}_i| = 1, i = 1, 2$
  • $B_i := \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{b}_i, \sigma), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{b}_i| = 1, i = 1, 2$
  önadjungáltak, négyzetük **1**
  • egyparaméteres állapotsereg: $\omega_\lambda := \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda -), \lambda \in [0, 1]$

$$\rho_\lambda := \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \lambda(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

  (normált) Tr és szinglett állapot konvex kombinációi
  • $\omega_\lambda(A_i B_j) = -\lambda(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \Rightarrow$
  $2|\omega_\lambda(R)| = \lambda|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|$
  • $\mathbf{a}_1 = (0, 1.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0)$
  • $\mathbf{a}_2 = (1, 0.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_2 - (-1, 1, 0)$
  spec választás esetén: $|\omega_\lambda(R)| = \lambda\sqrt{2} \Rightarrow$
  • $0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$ Bell egyenlőtlenség teljesül(het)
  • $1/\sqrt{2} < \lambda \leq 1$ Bell egyenlőtlenség sérül

Bell egyenlőtlenség

- Bell egyenlőséget sértő állapot létezik $S(\mathcal{C})$-ben $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ is nem-kommutatív
- Példa: $\mathcal{C} = M_2 \otimes M_2, \mathcal{A} = M_2 \otimes \mathbf{1}_2, \mathcal{B} = \mathbf{1}_2 \otimes M_2$
  • $A_i := (\mathbf{a}_i, \sigma) \otimes \mathbf{1}_2, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{a}_i| = 1, i = 1,2$
  • $B_i := \mathbf{1}_2 \otimes (\mathbf{b}_i, \sigma), \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{b}_i| = 1, i = 1,2$
  önadjungáltak, négyzetük $\mathbf{1}$
  • egyparaméteres állapotsereg: $\omega_\lambda := \mathrm{Tr}\,(\rho_\lambda -), \lambda \in [0,1]$

$$\rho_\lambda := \mathbf{1}_2 \otimes \mathbf{1}_2 - \lambda(\sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z)$$

  (normált) Tr és szinglett állapot konvex kombinációi
  • $\omega_\lambda(A_i B_j) = -\lambda(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) \Rightarrow$
  $2|\omega_\lambda(R)| = \lambda|(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)|$
  • $\mathbf{a}_1 = (0, 1.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_1 = (1,1,0)$
  • $\mathbf{a}_2 = (1, 0.0), \qquad \sqrt{2}\mathbf{b}_2 - (-1,1,0)$
  spec választás esetén: $|\omega_\lambda(R)| = \lambda\sqrt{2} \Rightarrow$
  • $0 \leq \lambda \leq 1/\sqrt{2}$ Bell egyenlőtlenség teljesül(het)
  • $1/\sqrt{2} < \lambda \leq 1$ Bell egyenlőtlenség sérül

Werner állapotok $M_n \otimes M_n$-en

- Összefonódott, de Bell egyenlőtlenséget teljesítő állapot $M_n \otimes M_n$-en
$$\rho_\alpha := \frac{\mathbf{1} + \alpha F}{n(n+\alpha)}, \alpha \in [-1, 1],$$
ahol $F = F^* = F^{-1}$ a flip operátor
$\Leftrightarrow (U \otimes U)\rho_\alpha(U^* \otimes U^*) = \rho_\alpha, U \in M_n$ unitér
- ρ sűrűségmátrix szeparábilis $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\rho F) \geq 0$,
mert $\mathrm{Tr}\,((\rho_1 \otimes \rho_2)F) = \mathrm{tr}\,(\rho_1\rho_2)$
- $\mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha F) = \frac{1+n\alpha}{n+\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha$ összefonódott, ha $-1 \leq \alpha < -1/n$
- $\alpha = W := -n/(n+1) \Rightarrow$ létezik "rejtett paraméteres" klasszikus kifejtése korrelációknak
$\Rightarrow \beta(\rho_W, M_n \otimes \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n \otimes M_n) = 1$, Bell egyenlőtlenség teljesül

Werner állapotok $M_n \otimes M_n$-en

- Összefonódott, de Bell egyenlőtlenséget teljesítő állapot $M_n \otimes M_n$-en
$$\rho_\alpha := \frac{\mathbf{1} + \alpha F}{n(n+\alpha)}, \alpha \in [-1, 1],$$
ahol $F = F^* = F^{-1}$ a flip operátor
$\Leftrightarrow (U \otimes U)\rho_\alpha(U^* \otimes U^*) = \rho_\alpha, U \in M_n$ unitér
- ρ sűrűségmátrix szeparábilis $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\rho F) \geq 0$, mert $\mathrm{Tr}\,((\rho_1 \otimes \rho_2)F) = \mathrm{tr}\,(\rho_1\rho_2)$
- $\mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha F) = \frac{1+n\alpha}{n+\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha$ összefonódott, ha $-1 \leq \alpha < -1/n$
- $\alpha = W := -n/(n+1) \Rightarrow$ létezik "rejtett paraméteres" klasszikus kifejtése korrelációknak
$\Rightarrow \beta(\rho_W, M_n \otimes \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n \otimes M_n) = 1$, Bell egyenlőtlenség teljesül

Werner állapotok $M_n \otimes M_n$-en

- Összefonódott, de Bell egyenlőtlenséget teljesítő állapot $M_n \otimes M_n$-en
$$\rho_\alpha := \frac{\mathbf{1} + \alpha F}{n(n+\alpha)}, \alpha \in [-1, 1],$$
ahol $F = F^* = F^{-1}$ a flip operátor
$\Leftrightarrow (U \otimes U)\rho_\alpha(U^* \otimes U^*) = \rho_\alpha, U \in M_n$ unitér
- ρ sűrűségmátrix szeparábilis $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\rho F) \geq 0$,
mert $\mathrm{Tr}\,((\rho_1 \otimes \rho_2)F) = \mathrm{tr}\,(\rho_1 \rho_2)$
- $\mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha F) = \frac{1+n\alpha}{n+\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha$ összefonódott, ha $-1 \leq \alpha < -1/n$
- $\alpha = W := -n/(n+1) \Rightarrow$ létezik "rejtett paraméteres" klasszikus kifejtése korrelációknak
$\Rightarrow \beta(\rho_W, M_n \otimes \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n \otimes M_n) = 1$, Bell egyenlőtlenség teljesül

Werner állapotok $M_n \otimes M_n$-en

- Összefonódott, de Bell egyenlőtlenséget teljesítő állapot $M_n \otimes M_n$-en
$$\rho_\alpha := \frac{\mathbf{1} + \alpha F}{n(n+\alpha)}, \alpha \in [-1, 1],$$
ahol $F = F^* = F^{-1}$ a flip operátor
$\Leftrightarrow (U \otimes U)\rho_\alpha(U^* \otimes U^*) = \rho_\alpha, U \in M_n$ unitér
- ρ sűrűségmátrix szeparábilis $\Rightarrow \mathrm{Tr}\,(\rho F) \geq 0$, mert $\mathrm{Tr}\,((\rho_1 \otimes \rho_2)F) = \mathrm{tr}\,(\rho_1\rho_2)$
- $\mathrm{Tr}\,(\rho_\alpha F) = \frac{1+n\alpha}{n+\alpha} \Rightarrow \rho_\alpha$ összefonódott, ha $-1 \leq \alpha < -1/n$
- $\alpha = W := -n/(n+1) \Rightarrow$ létezik "rejtett paraméteres" klasszikus kifejtése korrelációknak
$\Rightarrow \beta(\rho_W, M_n \otimes \mathbf{1}_n, \mathbf{1}_n \otimes M_n) = 1$, Bell egyenlőtlenség teljesül

Kvantumkorrelációk rejtett paraméteres kifejtése

- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ kommutáló unitális C^*-részalgebrák $\phi \colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ állapotbeli korrelációinak létezik rejtett paraméteres kifejtése, ha létezik a rejtett paramétereknek (Ω, Σ, m) vszínűségi mértéktere, hogy minden $\mathcal{A} \ni A = \sum_i a_i A_i, \mathcal{B} \ni B = \sum b_j B_j$ önadjungált elempár (diszkrét) spektrálfölbontásához létezik
  $F_A(i, -) \colon \Omega \to [0, 1], \quad \sum_i F_A(i, \omega) = 1$
  $F_B(j, -) \colon \Omega \to [0, 1], \quad \sum_j F_B(j, \omega) = 1$
  mérhető függvény, hogy

$$\phi(A_i B_j) = \int m(d\omega) F_A(i, \omega) F_B(j, \omega). \tag{1}$$

- pl. ha $\phi(-) = \sum_\omega m(\omega) \phi^\omega_{\mathcal{A}}(-) \phi^\omega_{\mathcal{B}}(-)$ szeparábilis állapot $\Rightarrow$ $F_A(i, \omega) := \phi^\omega_{\mathcal{A}}(A_i), \quad F_B(j, \omega) := \phi^\omega_{\mathcal{B}}(B_j)$ választással teljesül (1)
- ha ϕ kifejthető rejtett paraméteresen $\Rightarrow$ $\beta(\phi, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$, tehát ha létezik Bell egyenlőtlenséget sértő állapot, akkor nem létezhet általános rejtett paraméteres leírása kvantumkorrelációknak

Kvantumkorrelációk rejtett paraméteres kifejtése

- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ kommutáló unitális C^*-részalgebrák $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ állapotbeli korrelációinak létezik rejtett paraméteres kifejtése, ha létezik a rejtett paramétereknek (Ω, Σ, m) vszínűségi mértéktere, hogy minden $\mathcal{A} \ni A = \sum_i a_i A_i, \mathcal{B} \ni B = \sum b_j B_j$ önadjungált elempár (diszkrét) spektrálfölbontásához létezik
  $$F_A(i, -)\colon \Omega \to [0,1], \quad \sum_i F_A(i,\omega) = 1$$
  $$F_B(j, -)\colon \Omega \to [0,1], \quad \sum_j F_B(j,\omega) = 1$$
  mérhető függvény, hogy
  $$\phi(A_i B_j) = \int m(d\omega) F_A(i,\omega) F_B(j,\omega). \tag{1}$$
- pl. ha $\phi(-) = \sum_\omega m(\omega)\phi^\omega_{\mathcal{A}}(-)\phi^\omega_{\mathcal{B}}(-)$ szeparábilis állapot $\Rightarrow$ $F_A(i,\omega) := \phi^\omega_{\mathcal{A}}(A_i), \quad F_B(j,\omega) := \phi^\omega_{\mathcal{B}}(B_j)$ választással teljesül (1)
- ha ϕ kifejthető rejtett paraméteresen $\Rightarrow \beta(\phi, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$, tehát ha létezik Bell egyenlőtlenséget sértő állapot, akkor nem létezhet általános rejtett paraméteres leírása kvantumkorrelációknak

Kvantumkorrelációk rejtett paraméteres kifejtése

- $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ kommutáló unitális C^*-részalgebrák $\phi\colon \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ állapotbeli korrelációinak létezik rejtett paraméteres kifejtése, ha létezik a rejtett paramétereknek (Ω, Σ, m) vszínűségi mértéktere, hogy minden $\mathcal{A} \ni A = \sum_i a_i A_i, \mathcal{B} \ni B = \sum b_j B_j$ önadjungált elempár (diszkrét) spektrálfölbontásához létezik
  $$F_A(i, -)\colon \Omega \to [0,1], \quad \sum_i F_A(i,\omega) = 1$$
  $$F_B(j, -)\colon \Omega \to [0,1], \quad \sum_j F_B(j,\omega) = 1$$
  mérhető függvény, hogy
  $$\phi(A_i B_j) = \int m(d\omega) F_A(i,\omega) F_B(j,\omega). \tag{1}$$
- pl. ha $\phi(-) = \sum_\omega m(\omega) \phi^\omega_{\mathcal{A}}(-) \phi^\omega_{\mathcal{B}}(-)$ szeparábilis állapot $\Rightarrow$ $F_A(i,\omega) := \phi^\omega_{\mathcal{A}}(A_i), \quad F_B(j,\omega) := \phi^\omega_{\mathcal{B}}(B_j)$ választással teljesül (1)
- ha ϕ kifejthető rejtett paraméteresen $\Rightarrow$ $\beta(\phi, \mathcal{A}, \mathcal{B}) = 1$, tehát ha létezik Bell egyenlőtlenséget sértő állapot, akkor nem létezhet általános rejtett paraméteres leírása kvantumkorrelációknak

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \, X \, V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \; V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \; h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\rightarrow$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \times V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \; V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \; h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\rightarrow$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \times V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V'')$, $V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V)$, $h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\to$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \times V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \ V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_\mathcal{K} \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \ h \in \mathcal{P}_\mathcal{K}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\to$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \, X \, V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \; V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \; h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\to$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \, X \, V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \; V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\,\mathcal{A}$
  $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \; h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\to$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Lokális kvantumelmélet Minkowski téren

- $(\mathcal{K}, \subseteq)$: korlátos téridőtartományok (leginkább kettőskúpok) irányított, parciálisan rendezett halmaza
- téridőtartományok $\mapsto$ ott megfigyelhetők unitális C^*-algebrája

$$\mathcal{K} \ni V \mapsto \mathcal{A}(V)$$

- i) izotónia: $V_1 \subseteq V_2 \Rightarrow \mathcal{A}(V_1) \subseteq \mathcal{A}(V_2)$
- ii) mikrokauzalitás: $V_1 \, X \, V_2 \Rightarrow [\mathcal{A}(V_1), \mathcal{A}(V_2)] = 0$
- iii) kvázilokális algebra: $\mathcal{A} := \overline{\cup_{V \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(V)}$ induktív limesz
- iv) primitív kauzalitás: $\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$, ahol $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ Cauchy felületet tartalmazó téridőtartomány
- v) algebrai Haag dualitás: $\mathcal{A}(V')' \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}(V''), \; V \in \mathcal{K}$
- vi) kovariancia $\mathcal{P}_{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{P}$ téridő-izometriákra: $\alpha : \mathcal{P}_{\mathcal{K}} \to \mathrm{Aut}\, \mathcal{A}$ $\alpha_h(\mathcal{A}(V)) = \mathcal{A}(h \cdot V), \; h \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}, V \in \mathcal{K}$
- minden $V \in \mathcal{K}$ csak véges sok $\mathcal{K}$-beli elemet tartalmaz $\rightarrow$ lokálisan véges szabadsági fokú rendszerek leírása

Nemlokális korrelációk lokális oka

- mikrokauzalitás $\Rightarrow \phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapotot számtalan kommutáló összetett rendszerre megszoríthatjuk: $\phi_{|\mathcal{A}(V_1)\vee\mathcal{A}(V_2)}$, $V_1 X V_2$
  tipikusan
  - nem tiszta, sőt hű; nem szorzatállapot, nem szeparábilis $\Rightarrow$ korrelációk térszerűen szeparált tartományokra $\equiv$ nemlokális korrelációk
- lehetséges magyarázat: közös lokális ok, olyan (kísérleti) preparáció, esemény a korreláló események közös múltjában, ami a korrelációra vezet
- közös ok esemény: térszerűen szeparált, korreláló $\phi(AB) \neq \phi(A)\phi(B), A \in \mathcal{A}(V_A), B \in \mathcal{A}(V_B)$ projekciók $V_C \subset J_-(V_A) \cap / \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált közös oka a $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ projekciókra való egységfölbontás, ha

$$\phi_{C_i}(AB) = \phi_{C_i}(A)\phi_{C_i}(B), i = 1, \ldots, k, \tag{2}$$

$\phi_C(-) := \phi(C - C)/\phi(C)$.

Nemlokális korrelációk lokális oka

- mikrokauzalitás $\Rightarrow \phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapotot számtalan kommutáló összetett rendszerre megszoríthatjuk: $\phi_{|\mathcal{A}(V_1)\vee\mathcal{A}(V_2)}$, $V_1 X V_2$ tipikusan
  - nem tiszta, sőt hű; nem szorzatállapot, nem szeparábilis $\Rightarrow$ korrelációk térszerűen szeparált tartományokra $\equiv$ nemlokális korrelációk
- lehetséges magyarázat: közös lokális ok, olyan (kísérleti) preparáció, esemény a korreláló események közös múltjában, ami a korrelációra vezet
- közös ok esemény: térszerűen szeparált, korreláló $\phi(AB) \neq \phi(A)\phi(B), A \in \mathcal{A}(V_A), B \in \mathcal{A}(V_B)$ projekciók $V_C \subset J_-(V_A) \cap / \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált közös oka a $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ projekciókra való egységfölbontás, ha

$$\phi_{C_i}(AB) = \phi_{C_i}(A)\phi_{C_i}(B), i = 1, \ldots, k, \qquad (2)$$

$\phi_C(-) := \phi(C - C)/\phi(C)$.

Nemlokális korrelációk lokális oka

- mikrokauzalitás $\Rightarrow \phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapotot számtalan kommutáló összetett rendszerre megszoríthatjuk: $\phi_{|\mathcal{A}(V_1)\vee\mathcal{A}(V_2)}$, $V_1 X V_2$ tipikusan
  - nem tiszta, sőt hű; nem szorzatállapot, nem szeparábilis $\Rightarrow$ korrelációk térszerűen szeparált tartományokra $\equiv$ nemlokális korrelációk
- lehetséges magyarázat: közös lokális ok, olyan (kísérleti) preparáció, esemény a korreláló események közös múltjában, ami a korrelációra vezet
- közös ok esemény: térszerűen szeparált, korreláló $\phi(AB) \neq \phi(A)\phi(B), A \in \mathcal{A}(V_A), B \in \mathcal{A}(V_B)$ projekciók $V_C \subset J_-(V_A) \cap / \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált közös oka a $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ projekciókra való egységfölbontás, ha

$$\phi_{C_i}(AB) = \phi_{C_i}(A)\phi_{C_i}(B), i = 1, \ldots, k, \qquad (2)$$

$\phi_C(-) := \phi(C - C)/\phi(C)$.

Nemlokális korrelációk lokális oka

- mikrokauzalitás $\Rightarrow \phi \colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapotot számtalan kommutáló összetett rendszerre megszoríthatjuk: $\phi_{|\mathcal{A}(V_1)\vee\mathcal{A}(V_2)}$, $V_1 X V_2$ tipikusan
  - nem tiszta, sőt hű; nem szorzatállapot, nem szeparábilis $\Rightarrow$ korrelációk térszerűen szeparált tartományokra $\equiv$ nemlokális korrelációk
- lehetséges magyarázat: közös lokális ok, olyan (kísérleti) preparáció, esemény a korreláló események közös múltjában, ami a korrelációra vezet
- közös ok esemény: térszerűen szeparált, korreláló $\phi(AB) \neq \phi(A)\phi(B), A \in \mathcal{A}(V_A), B \in \mathcal{A}(V_B)$ projekciók $V_C \subset J_-(V_A) \cap / \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált közös oka a $\{C_1, \dots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ projekciókra való egységfölbontás, ha

$$\phi_{C_i}(AB) = \phi_{C_i}(A)\phi_{C_i}(B), i = 1, \dots, k, \tag{2}$$

$\phi_C(-) := \phi(C - C)/\phi(C)$.

Nemlokális korrelációk lokális oka

- lokálisan hű $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot esetén létezik $J_-(V_A) \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált $\{C_1, C_2\}$ közös ok,
  a) ha a lokális algebrák *III* típusú Neumann algebrák, ekkor A, B-vel kommutáló C_1, C_2 is van,
  b) ha $\mathcal{A}$ UHF C^*-algebra (lokális algebrák véges dimenziósak), ekkor C_1, C_2 nem föltétlen kommutál A, B-vel.
- együttes közös ok: térszerűen szeparált, páronként korreláló véges $\{A_m\} \subset \mathcal{A}(V_A), \{B_n\} \subset \mathcal{A}(V_B)$ projekcióhalmazok azonos $\{C_1, \ldots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ közös oka:

$$\phi_{C_i}(A_m B_n) = \phi_{C_i}(A_m)\phi_{C_i}(B_n). \tag{3}$$

- $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}$ ϕ állapotbeli korrelációnégyesére létezik együttes kommutáló közös ok $\Rightarrow$ Bell egyenlőtlenség teljesül Bell operátorukra a ϕ állapotban.
- lokális kvantumelméletben Bell egyenlőtlenséget sértő állapotra nincs lokális magyarázat?

Nemlokális korrelációk lokális oka

- lokálisan hű $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot esetén létezik $J_-(V_A) \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált $\{C_1, C_2\}$ közös ok,
  a) ha a lokális algebrák *III* típusú Neumann algebrák, ekkor A, B-vel kommutáló C_1, C_2 is van,
  b) ha $\mathcal{A}$ UHF C^*-algebra (lokális algebrák véges dimenziósak), ekkor C_1, C_2 nem föltétlen kommutál A, B-vel.
- együttes közös ok: térszerűen szeparált, páronként korreláló véges $\{A_m\} \subset \mathcal{A}(V_A), \{B_n\} \subset \mathcal{A}(V_B)$ projekcióhalmazok azonos $\{C_1, \dots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ közös oka:

$$\phi_{C_i}(A_m B_n) = \phi_{C_i}(A_m)\phi_{C_i}(B_n). \tag{3}$$

- $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}$ ϕ állapotbeli korrelációnégyesére létezik együttes kommutáló közös ok $\Rightarrow$ Bell egyenlőtlenség teljesül Bell operátorukra a ϕ állapotban.
- lokális kvantumelméletben Bell egyenlőtlenséget sértő állapotra nincs lokális magyarázat?

Nemlokális korrelációk lokális oka

- lokálisan hű $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ állapot esetén létezik $J_-(V_A) \cup J_-(V_B)$-ban lokalizált $\{C_1, C_2\}$ közös ok,
  a) ha a lokális algebrák *III* típusú Neumann algebrák, ekkor A, B-vel kommutáló C_1, C_2 is van,
  b) ha $\mathcal{A}$ UHF C^*-algebra (lokális algebrák véges dimenziósak), ekkor C_1, C_2 nem föltétlen kommutál A, B-vel.
- együttes közös ok: térszerűen szeparált, páronként korreláló véges $\{A_m\} \subset \mathcal{A}(V_A), \{B_n\} \subset \mathcal{A}(V_B)$ projekcióhalmazok azonos $\{C_1, \dots, C_k\} \subset \mathcal{A}(V_C)$ közös oka:

$$\phi_{C_i}(A_m B_n) = \phi_{C_i}(A_m)\phi_{C_i}(B_n). \tag{3}$$

- $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}$ ϕ állapotbeli korrelációnégyesére létezik együttes kommutáló közös ok $\Rightarrow$ Bell egyenlőtlenség teljesül Bell operátorukra a ϕ állapotban.
- lokális kvantumelméletben Bell egyenlőtlenséget sértő állapotra nincs lokális magyarázat?

Nemlokális korrelációk lokális oka

- Föloldás:
  a) együttes közös ok lehet nem-kommutáló, ekkor csak a
  $$\phi_C(-) := \sum_i \phi(C_i - C_i) \neq \phi(-)$$
  állapotra vezethető le a Bell egyenlőtlenség
  b) $\mathcal{M}^2$-beli lokális kvantum Ising modellben EPR-korrelációk szimulálhatók:
  $\mathcal{A}(V_A) \simeq M_2 \simeq \mathcal{A}(V_B), V_A X V_B$
  $\mathcal{A}(V_A) \vee \mathcal{A}(V_B) \simeq M_2 \otimes M_2$ és $\omega_{|\mathcal{A}(V_A)\vee\mathcal{A}(V_B)} = \omega_\lambda$.
  Bell egyenlőtlenséget sértő állapotokra Itt megadható $\{C, \mathbf{1} - C\}$ nemkommutáló együttes közös ok $J_-(V_A) \cap J_-(V_B)$-ben.
- ami a "nemlokális kvantumkorrelációk múltbéli lokális események kauzális időfejlődésének következményei" várakozást erősíti

Nemlokális korrelációk lokális oka

- Föloldás:
  a) együttes közös ok lehet nem-kommutáló, ekkor csak a

  $$\phi_C(-) := \sum_i \phi(C_i - C_i) \neq \phi(-)$$

  állapotra vezethető le a Bell egyenlőtlenség
  b) $\mathcal{M}^2$-beli lokális kvantum Ising modellben EPR-korrelációk szimulálhatók:
  $\mathcal{A}(V_A) \simeq M_2 \simeq \mathcal{A}(V_B)$, $V_A X V_B$
  $\mathcal{A}(V_A) \vee \mathcal{A}(V_B) \simeq M_2 \otimes M_2$ és $\omega_{|\mathcal{A}(V_A)\vee\mathcal{A}(V_B)} = \omega_\lambda$.
  Bell egyenlőtlenséget sértő állapotokra Itt megadható $\{C, \mathbf{1} - C\}$ nemkommutáló együttes közös ok $J_-(V_A) \cap J_-(V_B)$-ben.
- ami a "nemlokális kvantumkorrelációk múltbéli lokális események kauzális időfejlődésének következményei" várakozást erősíti

Irodalom

- S.J. Summers, R. Werner, Bell's inequalities and quantum field theory I. General setting
  J.Math.Phys. 26, 2440 (1987)
- R.F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden variable model
  Phys.Rev. A40, 4277 (1989)
- G. Hofer-Szabó, P. Vecsernyés, Bell inequality and common causal explanation in algebraic quantum field theories
  Stud.Hist.Phil.Mod.Phys. 44, 404 (2013)