$\boxed{V01}$

K, K' $\quad t' = f(t)$ $\quad \begin{pmatrix} t \\ \underline{r} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & \underline{0} \\ -\underline{V} & \underline{\underline{1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \underline{r} \end{pmatrix}$

$t' = t$

$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{V}t \qquad \underline{r}' \neq \underline{g}(\underline{r}) \qquad \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \underline{r} \end{pmatrix}$

$m \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{F} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} 0 \\ m\underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{F} \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \frac{m}{2}\underline{v}^2 & -\frac{m\underline{v}}{2} \\ -\frac{m\underline{v}}{2} & \frac{m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{v}\underline{F} & -\frac{1}{2}\underline{F} \\ -\frac{1}{2}\underline{F} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} t \\ \underline{r}(t) \end{pmatrix}$

VAZL

GAL. (NEMREL.) = + $(\wedge, \vee, -)$

TÉRIDŐMODELL: $\tau : M \to \mathbb{T}$

$(M, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \tau, h)$ = LIN. RÁKÉPEZÉS

M: 4-DIM. VALÓS IR. AFFIN TÉR ($\mathbb{M}$ FÖLÖTT)

τ = ABSZ. IDŐ (FÜGGVÉNY) TARTAM-KIÉRTÉKELÉS

$\mathbb{T}$: AZ IDŐTARTAMOK M.E.-E

$\mathbb{L}$: A TÁV.-OKÉ

$\operatorname{Ker} \tau =: S = \{x \in M \mid \tau x = 0\}$

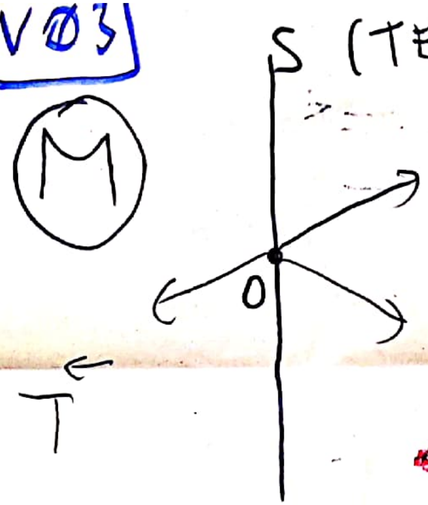
S 3 DIM. ALTÉR M-BEN

$h: S \times S \to \mathbb{L} \otimes \mathbb{L}$ EUKL. POZ. DEF. SZIMM. BILIN.

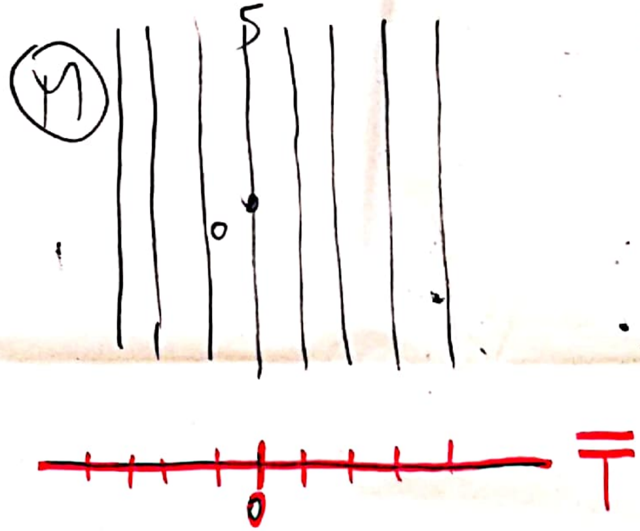
$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

V03

(TERSZERŮ)

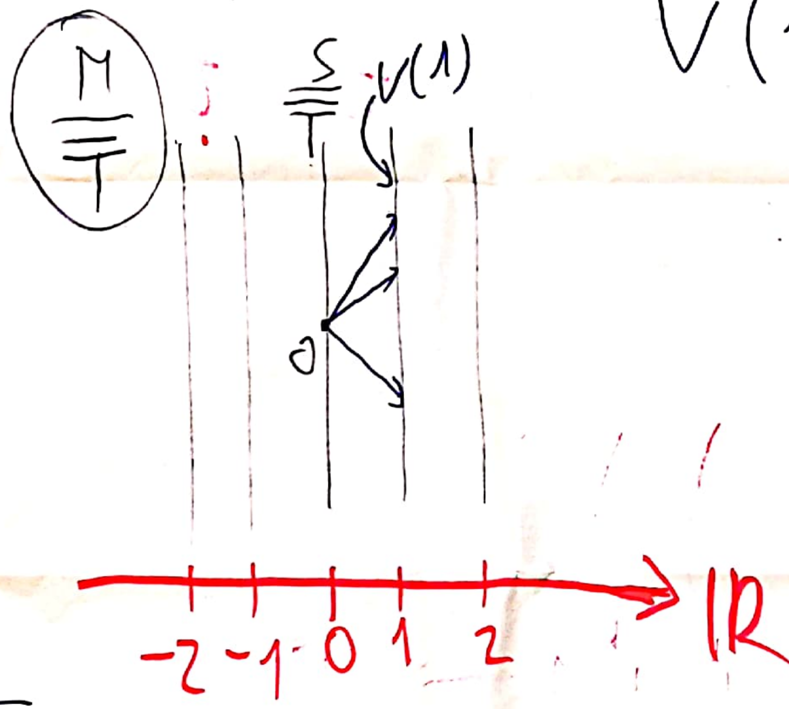


$\vec{T} := \{x \in M \mid \tau x > 0\}$

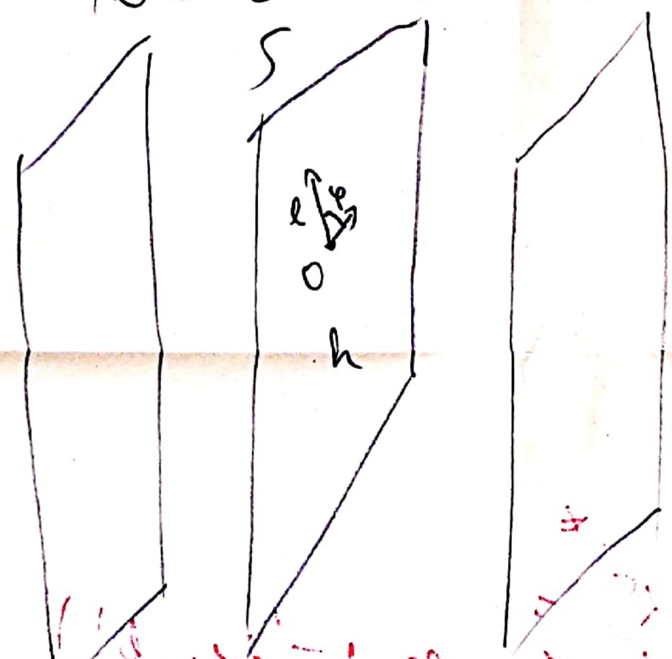


$\overset{\leftrightarrow}{T} = \overset{\leftarrow}{T} \cup \vec{T} = M \setminus S$

V(1)



IDŮRERŮ

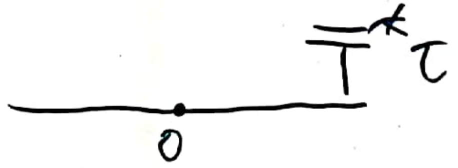


$\tau : M \to \overline{T}, \in \overline{T} \otimes M^*$

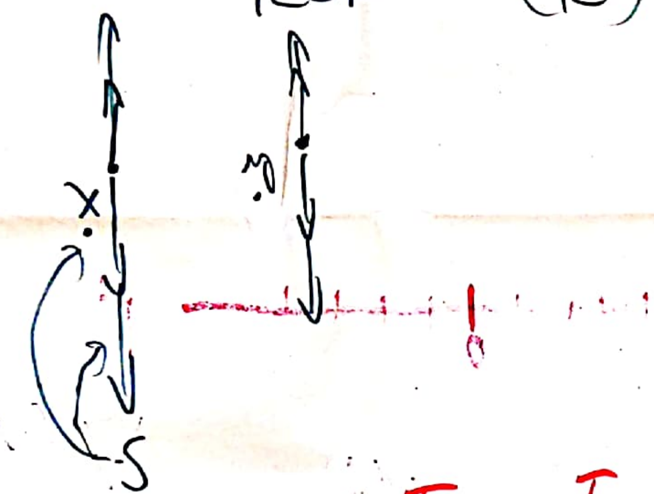
VØ4

$$S^* \equiv \frac{S}{\mathbb{L}\otimes\mathbb{K}} \qquad \left(\frac{S}{\mathbb{L}}\right)^* \equiv \left(\frac{S}{\mathbb{L}}\right)$$

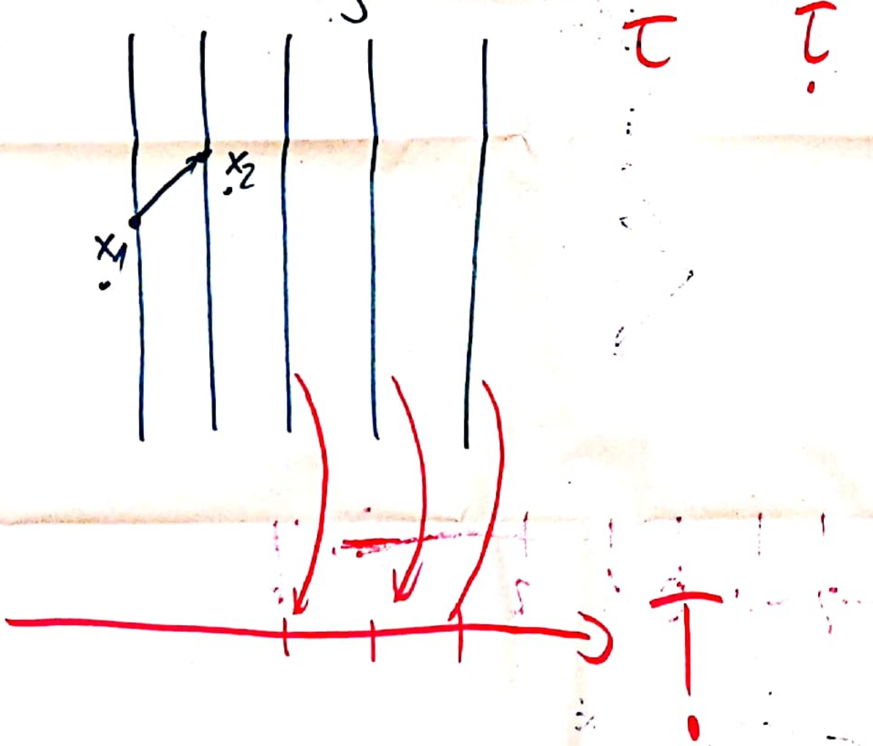
M^*



M

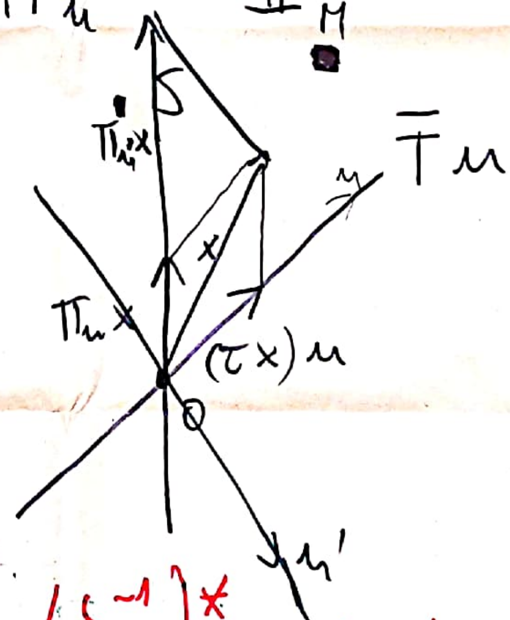


$T \otimes M^*$



$$\Pi_u := \mathbb{1}_M - u \otimes \tau : M \to S$$

$$u \in V(1)$$



$$\varsigma_u := (\tau, \Pi_u) :$$

$$M \to T \times S$$

$$x \mapsto (\tau x, \Pi_u x)$$

$$\eta_u : (\varsigma_u^{-1})^* : M^* \to (T \times S)^* = T^* \times S^*$$

$$\eta_u k = (k u, k|_S)$$

NØS

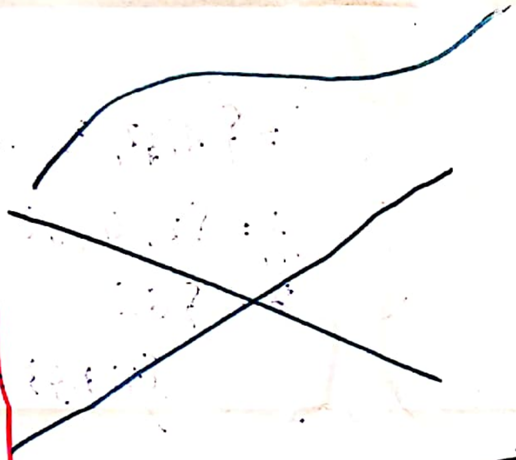
$K : M \to M^*$

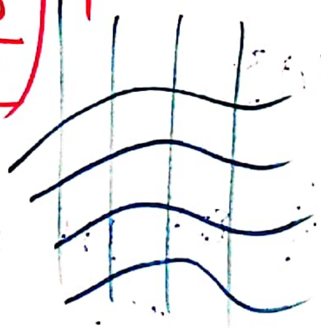
$\eta_u K = (-V_u, A)$

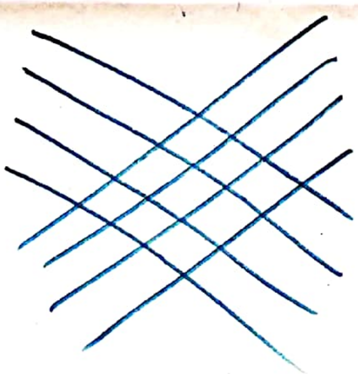
M

M^*, M

$\left(\frac{S}{IL}\right)^* \equiv \left(\frac{S}{IL}\right)$







$U : M \to V(1)$

$u : M \to V(1)$ KONSTANS

SPEC. REL.

(M, T, g)

4D IR. AFF.

IL :

$M^* \equiv \frac{M}{T \otimes T}$

$\left(\frac{M}{T}\right)^* \equiv \frac{M}{T}$

$g(x,x)=0$

$x \cdot x = 0$

$g : M \times M \to T \otimes T$

LORENTZ-SZORZÁS

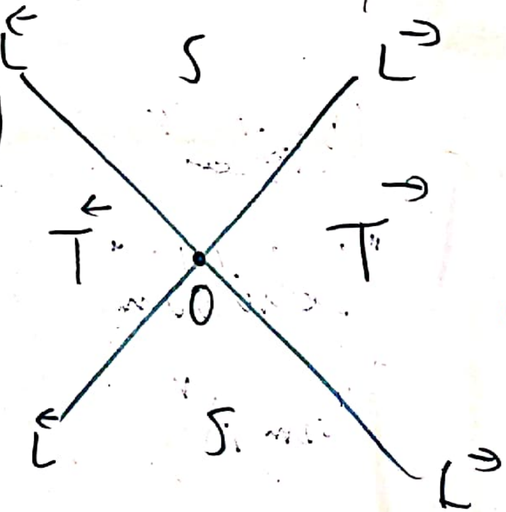
BILIN., SZIMM.

$(3,1)$

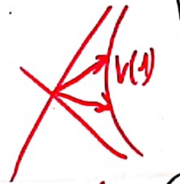
IDŐSZERŰ

TÉRSZERŰ

M



$\frac{M}{T}$



$g(u,u) = -1$

u SZERINTI

SZETHAS.: $\tau_u : x \mapsto -u \cdot x$

Π_u

V00

OBJEKTUM
VISZONYOK } RENDSZER → ESEMÉNYEK → VALÓSZÍNŰSÉG

KÖRÜLMÉNYEK → VALÓSZÍNŰSÉG $= \dfrac{\#\text{ ESEMÉNY BEKÖV.}}{\#\text{ ÖSSZES MÉRÉS}}$

De Morgan:

$$\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\!\!\!\!\bigcap A_n\right)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\!\!\!\!\bigcup A_n^c$$

Alph.

$A, B \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$

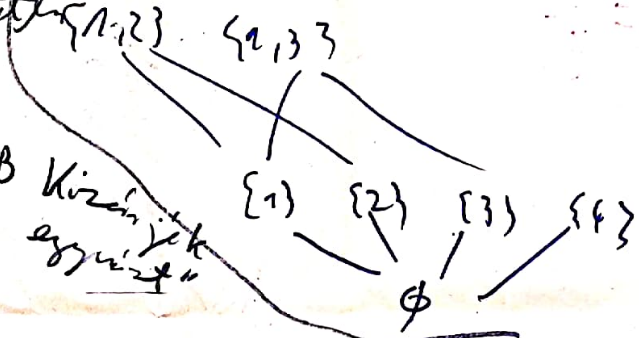
$\mathcal{A}$: S : V, V

$\mathcal{A}$: $\mathcal{B}(V)$

$S = \{1, 2, 3, \ldots 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$ $\quad A$
$\cup\!\!\mid$ $\qquad\qquad\quad \Uparrow$
$B = \{6\}$ $\qquad\quad B$

$\{1,2,3,4\} = S$



$A \subseteq B$ "Ha A akkor B"

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ "$A \cap B$: A és B"

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ "$A \cup B$: A vagy B"

$S \in \mathcal{A}$ "Biztos"

$\emptyset \in \mathcal{A}$ "Lehetetlen"

$A^c = S \setminus A$ "Nem A"

$A \cap B = \emptyset$ "Együtt lehetetlen"
$\Updownarrow$
$A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$ "A és B kizárják egymást"

$\mathcal{A}$: disztributív:

$$A \overset{\cup}{\cap} (B \overset{\cap}{\cup} C) = (A \overset{\cup}{\cap} B) \overset{\cap}{\cup} (A \overset{\cup}{\cap} C)$$

$A \cap A^c = \emptyset$, $A \cup A^c = S$

$A \cap B = \emptyset$ és $A \cup B = S$
$\Longrightarrow B = A^c$

V07 VAL. VÁLT.

$$f: S \longrightarrow V \xrightarrow{\Phi} V'$$

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}(S) \xleftarrow{f^{-1}} \mathcal{B}(V) \xleftarrow{\Phi^{-1}} \mathcal{B}(V')$$

$E \in \mathcal{B}(V)$

$$f^{-1}(E) = \{ s \in S \mid f(s) \in E \}$$

~~Valsz.~~ VALSZÉGI MÉRTÉK (BOREL M.)

$P: \mathcal{A} \to [0,1]$

$p \circ f^{-1}$: f-nek a P-beli ELOSZLÁSA

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad [0,1]$$

$\forall n,m: \ A_n \subseteq A_m^c$

$f: S \longrightarrow V$

$\mathcal{A} \ni A_n$

$v_n \in V$

$$f = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \chi_{A_n} \equiv f(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \chi_{A_n}(s)$$

VÁRHATÓ ÉRTÉK: $\sum_n \underbrace{P(A_n)}_{\int_{A_n} dp(s)} v_n = \int_S v_n \chi_{A_n}(s)\, dp(s) = \int_S f\, dp$

$$\int_S \chi_{A_n}(s)\, dp(s)$$

$$\sum_n P(\underbrace{A_n}_{f^{-1}(\{v_n\})}) v_n = \sum_n v_n (p\circ f^{-1})(\{v_n\})$$

$$= \int_V v_n \, d(p\circ f^{-1})(v_n)$$

$$= \int_V \mathrm{Id}_V \, d(p\circ f^{-1})$$

$$\eta_p(f) = \int f \, dp = \int \mathrm{Id}_V \, d(p\circ f^{-1})$$

Pl: $(k_1, \dots, k_N): V \to \mathbb{R}^N$

$k_i \circ f$: f valvált. koordinátái

$$S \xrightarrow{f_1} V_1$$

$$S \xrightarrow{f_2} V_2$$

$$f: S \xrightarrow{f = (f_1, f_2)} V_1 \times V_2, \quad V_1 \times V_2 \xrightarrow{pr_1} V_1, \quad V_1 \times V_2 \xrightarrow{pr_2} V_2$$

~~$pr_1: V_1 \times$~~

$f_1 = pr_1 \circ f$

$f_2 = pr_2 \circ f$

$$f^{-1}(E_1 \times E_2) = \overline{(f_1, f_2)}^{-1}(E_1 \times E_2) = f^{-1}(E_1) \cap f^{-1}(E_2)$$

V08

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{p(A_n)}_{\int_S \chi_{A_n}\,dp} v_n = \int_S \underbrace{\sum v_n \chi_{A_n}(s)}_{f}\,dp(s) = \int_S f(s)\,dp(s) \qquad f = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \chi_{A_n}$$

$$\cancel{A_n = f^{-1}(\{v_n\})} \qquad A_n = f^{-1}(\{v_n\})$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (p\circ f^{-1})(\{v_n\})\,\underbrace{v_n}_{\mathrm{Id}_V v_n} = \int_V (\mathrm{Id}_V v_n)\,d(p\circ f^{-1})(v_n) = \int_V \mathrm{Id}_V\,d(p\circ f^{-1})$$

$$\eta_p(f) = \int f\,dp = \int \mathrm{Id}_V\,d(p\circ f^{-1})$$

$f: S \to V$ és $\|\ \|$

$V = \mathbb{R}$

$$\eta_p^m(f) = \int f^m\,dp = \int \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}^m\,d(p\circ f^{-1})$$

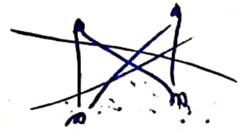
SZÓRÁS: $$\sigma_p(f) = \sqrt{\int_S \|f - \eta_p(f)\|^2\,dp} = \sqrt{\int_V \|\mathrm{Id}_V - \eta_p(f)\|^2\,d(p\circ f^{-1})}$$

$f: S \to V$

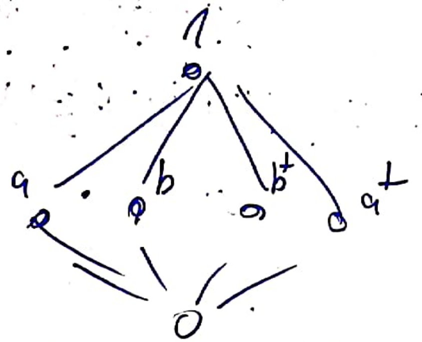
$$\eta_p(f) = 0 + \int_S (f(s) - 0)\,dp(s)$$

VD 9) $\mathcal{L}$: ORTOMODULÁRIS σ-HÁLÓ // SPEC : $\mathcal{B}(S) = \mathcal{A}$

- $\leq$ RÉSZBEN REND ($a \leq a$; $a \leq b$ és $b \leq a \Rightarrow a = b$, $a \leq b$ és $b \leq c$ akkor $a \leq c$)
  (REFL.) (ANTISZIMM.)



- KORL.: $0, 1 \in \mathcal{L}$ $\forall a \in \mathcal{L}$: $0 \leq a$, $a \leq 1$;
- ELEMI ESEMÉNY: e : $\forall a \in \mathcal{L}$ $a \leq e \Rightarrow a = e$ vagy $a = 0$
- $a_n \in \mathcal{L}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathcal{L}$ $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathcal{L}$ (HÁLÓ)



- ORTOKOMPLEMENTÁCIÓ : $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$ $a \mapsto a^\perp$: $(a^\perp)^\perp = a$
  - $a \leq b \Leftrightarrow b^\perp \leq a^\perp$

KÖV: DEMORGAN: $\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n\right)^\perp = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n^\perp$, $\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a_n\right)^\perp = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n^\perp$

$a \wedge a^\perp = 0$ $a \vee a^\perp = 1$

$a \wedge b = 0$
$a \not\leq b^\perp$

- $a \leq b$ akkor $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$

ORTOMOD $\Leftarrow$ $\not\Rightarrow$ HA DISZTR: $= (a \vee b) \wedge \underbrace{(a \vee a^\perp)}_{1}$
$= a \vee b = b$

$0^\perp = 1$ $1^\perp = 0$

RÉSZOBJ

$$\frac{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}}{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}}$$

RÉSZH

ORTO-σ-HOM

$$\mathcal{L} \xrightarrow{h} \mathcal{L}'$$

U10 FIZ. MENNY. V

$\mathcal{L} \xleftarrow{u} B(V)$ u: ORTO-σ-HOM.

$\mathcal{L} \cong u(B(V))$ DISZTR. RÉSZHÁLÓ

$S \xrightarrow{f} V$

$A = B(S) \xleftarrow{\hat{f}} B(V)$

$Sharp(\hat{f}) = Ran(f)$

$Supp(\hat{f}) = \overline{Ran(f)}$

u éles pontja: $Sharp(u) = \{v \in V \mid u(\{v\}) \neq 0\}$

TARTÓJA $Supp(u) = \{v \in V \mid \forall G \ni v$ NYÍLT $u(G) \neq 0\}$

FIZ. KÖRÜLMÉNYEK (ÁLT. VALSÉGI MÉRTÉKEK)

$$\mathcal{L} \xrightarrow{p} [0,1]$$

$p(1) = 1$

$a_n \in \mathcal{L}$: $a_n \leq a_m^{\perp}$ $\forall n, m$ $\quad p\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} a_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(a_n)$

~~$n \neq m$~~

$p(0) = 0$

$a \leq b \Rightarrow p(a) \leq p(b)$

$a \wedge b = 0$ de $a \nleq b^{\perp}$ $\quad \cancel{p(a \vee b)}$ $\exists p$ $\quad p(b) = 1$ és $p(a) = 0$

P SZÓRÁSMENTES

$p : \mathcal{L} \to \{0,1\}$

$\lambda_n \geq 0$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n = 1$ $\quad p_n$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n p_n$ is KÖRÜLMÉNY

V11) p TISZTA $\forall$ $P = \sum \lambda_n P_n$ $\quad \lambda_n = \begin{cases} 1 & \cancel{\text{ha } n=m}\ \exists m: n=m \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$

SZÓRÁSMENTES $\Rightarrow$ TISZTA
(0, 1-et vesz fel) $\not\Leftarrow$

DIRAC $\Longleftrightarrow$ SZÓRÁSMENTES $\Longleftrightarrow$ TISZTA ??

$\forall$ p: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(S) \to [0,1]$ KLASSZ:

$\forall$: $\mathcal{B}(V) \xrightarrow{u} \mathcal{L} \xrightarrow{p} [0,1]$

$p \circ u$ "u ELOSZLÁSA"

V.É.

$$\eta_p(u) = 0 + \int_V (\mathrm{Id}_V - 0)\, d(p \circ u)$$

Sz.

σ MINT KLASSZ.

Ha p SZÓRÁSMENTES $\Rightarrow$ $\forall u$ fiz menny:

- $p \circ u$ DIRAC MÉRTÉK
- $\eta_p(u) \in \mathrm{Spec}(u)$
- $\sigma_p(u) = 0$

V12

HILBERT-TEREK

Motiváció: $L^2(\mathbb{R}^3)$, ℓ^2 $\rightsquigarrow$ Hilbert-terek

Def. $\langle\cdot|\cdot\rangle : \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ szeszkvilineáris forma, ha (sesquilinear form)

1. második változóban lin.
2. $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle^*$ komplex konj.
3. $\langle x|x\rangle \geq 0$ és $\langle x|x\rangle = 0 \Rightarrow x=0$

Példa 1. $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ $\quad \langle x|y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x^{i*} y^i$

2. $\mathcal{H} = \ell^2 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty\}$ $\quad \langle (a_n)|(b_n)\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^* b_n$

3. $\mathcal{H} = L^2([0,1]) = \{f:[0,1]\to\mathbb{C} \mid \int |f|^2 < \infty\}$ $\quad \langle f|g\rangle = \int f^*(x) g(x)dx$

Cauchy-Schwarz: $|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle}$

Norma $\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$

Def $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ határértéke $x\in\mathcal{H}$, ha $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: \|x_n - x\| < \varepsilon$

Def $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N: \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

Def Hilbert-tér $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ úgy $\mathcal{H}$ $\mathbb{C}$-vektortér, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ szeszkvilin. + teljes

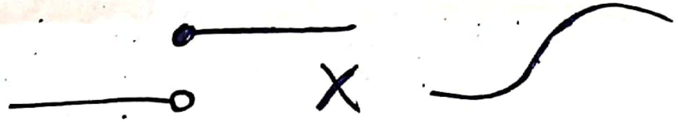
Def $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ teljes, ha minden Cauchy konv.

V13)

($(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Schauder bázis, ha $\forall x\in H: \; x=\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n e_n$ ($\exists!$)) szeparábilis

② Riesz-féle reprezentációs tétel

f folytonos $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$



$\langle\cdot|\cdot\rangle$ folytonos fv.

$\langle x|\cdot\rangle : H \to \mathbb{C}$ folytonos funkcionál

Tétel $\varphi: H\to\mathbb{C}$ folyt., lin.

$\Longrightarrow \varphi = \langle x|\cdot\rangle \quad \exists! x$

Fizikus jelölés: $|\psi\rangle \in H$

$\langle\psi|\cdot\rangle =: \langle\psi|$

$|\uparrow\rangle \quad \langle\chi|\psi\rangle = \langle\chi|\,|\psi\rangle$

Zártság

③ Operátorok

domain

Def. Operátor: $A: \mathrm{Dom}(A) \to H$ lin.

ahol $\mathrm{Dom}(A) = \mathcal{D}(A) \subset H$ lin. alt.

Sűrű altér: $\mathcal{D}(A)$ sűrű, ha $\forall \varepsilon>0 \; \forall x\in H \; \exists y\in\mathcal{D}(A)$ hogy $\|x-y\|<\varepsilon$

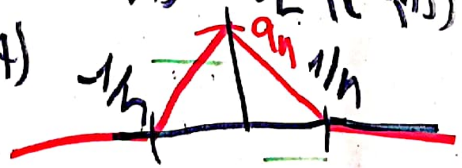
Tétel $A: \mathcal{D}(A)\to H$ lin. folytonos

$\Longleftrightarrow$ A korlátos $\quad \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} < C$

Ellenpélda $\mathrm{Dom}(A) := \{ f\in L^2([-1,1]) \mid if' \in L^2 \}$

$A: \mathrm{Dom}(A) \to L^2([-1,1]) \quad f\mapsto if'$

$f_n \in \mathrm{Dom}(A)$



V14)

Adjungáltak

$$(A_{ij})^\dagger = A^*_{ji}$$

$\iff \langle \delta_0^i | A \cancel{xx}\, \delta_0^j \rangle = \langle B \delta_0^i | \delta_0^j \rangle$

$\iff \langle x | Ay \rangle = \langle A^* x | y \rangle \ \forall x, y$

$\mathcal{D}(A^\dagger) := \{ x \in H \mid \mathcal{D}(A) \to \mathbb{C},\ y \mapsto \langle x, Ay \rangle$ folytonos $\}$

$A^\dagger x := z$ $\quad \langle z, \ \rangle$

$y \in D(A),\ x \in D(A^\dagger)$

A^* zárt

Speciális operátorok

Def: $A : \mathcal{D}(A) \to H$ szimmetrikus (hermitikus), ha

$A^\dagger x = Ax \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$

$A^\dagger|_{\mathcal{D}(A)} = A \quad A \subseteq A^\dagger$

Def. $A : \mathcal{D}(A) \to H$ önadjungált (self-adjoint), ha $A^\dagger = A$.

Lényegében önadjungált $(\overline{A})^\dagger = \overline{A}$ lezárt és szimm.

Def. $U : \mathrm{Dom}(U) \to H$ unitér (unitary), ha

① $\mathrm{Dom}(U) = H$

② U bijekció

③ $U^\dagger U = id_H \quad U^\dagger U x = x$

áll. U unitér $\iff \langle Ux | Uy \rangle = \langle x | y \rangle \ \forall x \in H$

Def $N : \mathcal{D}(N) \to H$ normális, ha

① $\mathcal{D}(N) \subset H$ sűrű

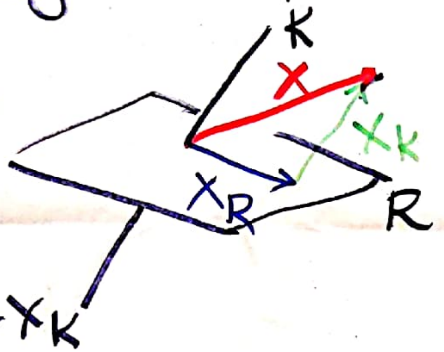
② $\mathcal{D}(N) = \mathcal{D}(N^\dagger)$

③ N zárt

④ $N^\dagger N = N N^\dagger$

V15 Ortogonális projektorok

Motiváció:



$x = x_R + x_K$

$P(x_R + x_K) = x_R$

$P^2(x_R + x_K) = P(x_R) = x_R$

$\boxed{P^2 = P}$

$x = x_R + x_K$

$y = y_R + y_K$

$\langle x | Py \rangle = \langle x_R + x_K | P(y_R + y_K) \rangle$

$\langle P^+ x | y \rangle = \langle x_R + \cancel{x_K} | y_R \rangle$

$= \langle x_R | y_R \rangle = \langle Px | y_R \rangle$

$= \langle Px | y \rangle$

$\boxed{P^+ = P}$

Def. $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ (ortogonális) projektor (orthogonal projection), ha $P^2 = P$, $P^+ = P$.

Feladatok ① Bbh. P folytonos

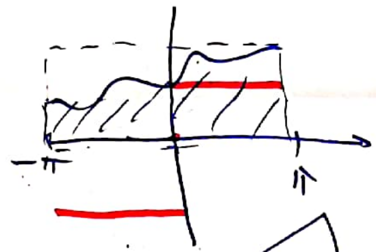
② $\|Px\|^2 = \langle x, Px \rangle$

③ P proj $\Longrightarrow id_H - P$

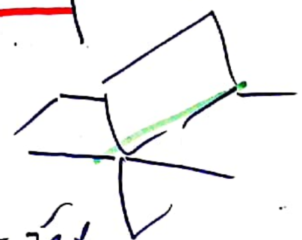
$K \subset \mathcal{H}$ altér zárt, ha minden K-beli konvergens sorozat határértéke is K-beli

Példa (ellenp) $\mathcal{H} = L^2([-\pi, \pi])$

$C^1([-\pi, \pi]) \subset L^2([-\pi, \pi])$



$\mathrm{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^+ \\ \text{ptlan}}} \frac{\sin(kx)}{k}$



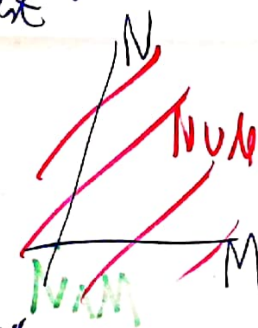
Ran $P \subset \mathcal{H}$ zárt altér $\Longrightarrow$ $(\text{Ran}\, P)^\perp$ is zárt

bijekció: Ran $P \longleftrightarrow P$

N, M zárt $\subseteq \mathcal{H}$ $N \leq M$, ha $N \subseteq M$

$N \not\leq M$ $M^\perp = M^\perp$ ort. kiegészítő

$P \leq Q \Longleftrightarrow \exists\, QP = $ ortokompl



V16) Operátorok spektruma

motiváció (véges dim): $A: V \to V$ sajátértéke $\lambda \in \mathbb{C}$
ha $\exists v \in V \setminus \{0\}$, hogy $Av = \lambda v$

$(A - \lambda\, id_V)v = 0$ $\quad$ $\boxed{A - \lambda\, id_V \text{ nem injektív}}$

$0 \mapsto 0$

$v \mapsto 0$

Def. $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ sajátértéke (eigenvalue) $\lambda \in \mathbb{C}$, ha $A - \lambda\, id_V$ nem injektív

$\mathrm{Eig}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ s.értéke } A\text{-nak}\}$

Példa ① $\mathcal{H} = \ell^2$ $\quad L: \ell^2 \to \ell^2 \quad (a_n)_n \mapsto (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$

$(a_0, a_1, a_2, \dots) \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)$

$\mathrm{Eig}(L) = ?$

② $\mathcal{H} = \ell^2 \quad R: \ell^2 \to \ell^2 \quad (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, a_2, \dots)$

$\mathrm{Eig}(R) = ?$

Def $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$-nak reguláris értéke $\lambda \in \mathbb{C}$, ha
$A - \lambda\, id_{\mathcal{H}}|_{\mathcal{D}(A)}: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$

① injektív

② $(A - \lambda\, id_{\mathcal{H}})^{-1}$ sűrűn értelmezett

③ $(A - \lambda\, id_{\mathcal{H}})^{-1}$ folytonos

Def. $\mathrm{Sp}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ nem reg.}\}$

$\mathrm{Eig}(A) \subseteq \mathrm{Sp}(A)$

① $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ önadjungált
$\Longrightarrow \mathrm{Eig}(A) \subseteq \mathbb{R}$

biz. $\lambda \in \mathrm{Eig}(A) \quad v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$

$\lambda \langle v, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle$
$= \langle v, Av \rangle = \langle A^* v, v \rangle$
$= \langle Av, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle$
$= \lambda^* \langle v, v \rangle$

$\underbrace{(\lambda - \lambda^*)}_{=0} \underbrace{\langle v, v \rangle}_{>0} = 0 \quad \lambda^* = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

□

Feladat $A: \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ önadj.
$\lambda, \mu \in \mathrm{Eig}(A) \quad \lambda \neq \mu$
$\Longrightarrow \mathrm{Eig}(A, \lambda) \perp \mathrm{Eig}(A, \mu)$

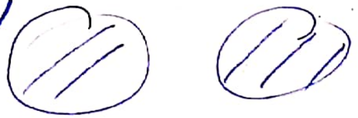
$(\lambda - \mu) \langle v, w \rangle$

$v \in \mathrm{Eig}(A, \lambda)$

$w \in \mathrm{Eig}(A, \mu)$

V17

Projektormérték, spektráltétel

① 

Def. $P: \mathcal{B}(S) \longrightarrow \Pr H$ projektormérték
(projection valued measure)

① $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(S)$ $E_i \cap E_j = \emptyset$ ha $i \neq j$ ② $P(S) = id_H$

$$P\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) = (s)\sum_{i\in\mathbb{N}} P(E_i)$$

(erős határérték strong limit)

áll. projektormérték $\Longrightarrow$ orto-σ-homomorfizmus
(vagyis valváltozó)

② Projektormérték szerinti integrálás

Cél ① valváltozó = projektormérték ?

mérhető függv. = önadj. op.

② $v_0 \rightsquigarrow v_t = \underbrace{e^{itH}}_{\text{unitér}} v_0$

$\mathcal{D}(e^{itH}) = \mathcal{H}$

$e^{itH} \stackrel{?}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(it)^n}{n!} H^n$ $\mathcal{D}(H)$

$\langle\psi | \underbrace{(\int f\, dP)}_{\hat{P}(f)}\varphi\rangle = \int f\, d\mu^P_{\psi\varphi}$

Riesz $\cancel{\langle\psi | \hat{P}(f)\varphi\rangle = \int f\, d\mu_{\psi\varphi}}$

$\psi, \varphi \in H$

$E \mapsto \langle\psi | P(E)\varphi\rangle \in \mathbb{C}$, $E \in \mathcal{B}(S)$

$\mathbb{C}$ értékű mérték $\mu^P_{\psi,\varphi}$

$\int f\, d\mu^P_{\psi\varphi}$

① $\mu_{\varphi,\varphi}(E) \in \mathbb{R}$ ② $\mu_{\varphi,\varphi}(S) < \infty$

③ $\int f\, dP = ?$ $f: S \to \mathbb{C}$ mérhető

$D_f := \{\varphi \in H \mid f \in L^2(\mu^P_{\varphi,\varphi})\}$

áll. $D_f \subset H$ sűrű altér

$\mathcal{H} \times D_f \to \mathbb{C}$ $(\underset{\overline{lin}}{\psi}, \underset{lin}{\varphi}) \mapsto \int f\, d\mu^P_{\psi\varphi}$ folyt.

$f^*(s) = (f(s))^*$

$D_{f^*} = D_f$

$|f^*|^2 = |f|^2$

V 18

áll. $\|\hat{P}(f)\varphi\|^2 = \int |f|^2 d\mu^P_{\varphi\varphi}$ $\quad f \in L^2(\mu^P_{\varphi,\varphi}) \Leftrightarrow \|\hat{P}(f)\varphi\| < \infty$

Feladat. $\hat{P}(\chi_E) = P(E)$

$\langle\psi | \hat{P}(\chi_E)\varphi\rangle = \int \chi_E \, d\mu^P_{\psi,\varphi}$

$= \mu^P_{\psi,\varphi}(E)$

$= \langle\psi, P(E)\varphi\rangle$

$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$

áll. $\hat{P}(f)^* = \hat{P}(f^*)$

$\Rightarrow f(x) \in \mathbb{R} \; \forall x \in S \rightarrow \hat{P}(f)$ önadj.

f korlátos $\Rightarrow D_f = H$

③ Karakterisztikus projektormértékek

$S \rightsquigarrow B(S)$ $\quad \mu$ mérték

$H := L^2(\mu)$ $\quad \langle f, g\rangle = \int f^* g \, d\mu$

$f: S \to \mathbb{C}$ mérhető

$\mathrm{Dom}(M_f) = \{\varphi \in L^2(\mu) \mid f\cdot\varphi \in L^2(\mu)\}$

$M_f: \mathrm{Dom}(M_f) \to L^2(\mu)$

$\varphi \mapsto f\varphi$

Ha $f = \chi_E$ $\quad M_{\chi_E}$: projektor

$\chi_E^2 = \chi_E$

$\chi_E^* = \chi_E$

$K: B(S) \longrightarrow \mathrm{Pr}\, L^2(\mu)$

$E \longmapsto M_{\chi_E}$

karakterisztikus proj. mérték

$\mu^K_{\varphi,\varphi}(E) = \langle\varphi | K(E)\varphi\rangle$

$= \int \varphi^* K(E)\varphi \, d\mu = \int \varphi^* \chi_E \varphi \, d\mu$

$= \int \chi_E |\varphi|^2 d\mu = (|\varphi|^2\mu)(E)$

áll. $\hat{K}(f) = M_f$